Министерство Образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. В. Бузланов, В. С. Монахов, В. В. Подгорная,
И. Л. Сохор

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ
в четырех частях
для студентов математических
специальностей вузов.
Часть 1

Гомель 2016

УДК
ББК
Б

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Бузланов А. В.

Б Геометрия и алгебра. Линейная алгебра : практикум : в 4 ч. / А. В. Бузланов [и др.].; Мин-во обр. РБ, Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины. — Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины. — 2016. — Ч. 1. — 48 с.

Практикум включает разделы линейной алгебры. По каждой теме изложены элементы теории, приведены образцы решения типовых задач, предложены 15 вариантов индивидуальных заданий. Практикум адресован студентам математических специальностей вузов. Может быть использован студентами других специальностей, изучающими вопросы алгебры.

Первая часть практикума содержит разделы "Линейные пространства и их начальные свойства"; "Базис и размерность линейного пространства".

УДК
ББК

Предисловие

Настоящее пособие создано на основе многолетнего опыта работы авторов со студентами первого курса математического факультета Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Оно охватывает разделы линейной алгебры, которые первокурсниками изучаются во втором семестре.

Весь материал разбит на 8 разделов. В каждом разделе приведены необходимые для практической части теоретические сведения, образцы решения типовых задач. По каждой теме предложены 15 вариантов индивидуальных заданий. Все вместе это составляет тот необходимый минимум знаний и умений, которым дожен владеть студент-математик по линейной алгебре. Такое построение содержания каждого раздела способствует выработке навыков самостоятельной работы студентов при проведении практических и лабораторных занятий. Настоящее пособие предназначено студентам математического факультета специальностей "Математика", "Прикладная математика", "Экономическая кибернетика", "Программное обеспечение информационных технологий", "Информатика и технологии программирования". Пособие может успешно использоваться и при изучении соответствующих разделов курса "Высшая математика" других специальностей.

Авторы

1 ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ НАЧАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

1.1 Элементы теории

1.1.1 Определение линейного пространства

Линейным (векторным) пространством над полем P называется непустое множество V, удовлетворяющее следующим условиям:

1 Любым двум элементам $\bar{x}, \bar{y} \in V$ соответствует однозначно определенный элемент $\bar{x} + \bar{y} \in V$, называемый их *суммой*, причем

1. 1) для любых элементов $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z} \in V$

$$(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z});$$

1. 2) для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x};$$

1. 3) в множестве V существует такой элемент $\bar{0}$, что для всех $\bar{x} \in V$ $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$. Элемент $\bar{0}$ называют *нулевым элементом*;

1. 4) для каждого элемента $\bar{x} \in V$ существует элемент $\bar{y} \in V$ такой, что $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$. Элемент $\bar{y}$ называют *противоположным к элементу* $\bar{x}$ и обозначают $-\bar{x}$.

2 Любым двум элементам $\alpha \in P$ и $\bar{x} \in V$ соответствует однозначно определенный элемент $\alpha\bar{x} \in V$, называемый *произведением элементов* α *и* $\bar{x}$, причем

2. 1) для любых α, $\beta \in P$ и любого $\bar{x} \in V$

$$(\alpha\beta)\bar{x} = \alpha(\beta\bar{x});$$

2. 2) если 1 — единичный элемент поля P, то для любого $\bar{x} \in V$ $1\bar{x} = \bar{x}$;

2.3) для любого $\alpha \in P$ и любых $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$

$$\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y};$$

2.4) для любых α, $\beta \in P$ и любого $\bar{x} \in V$

$$(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}.$$

Если V — линейное пространство над полем P, то элементы из V называются *векторами*, а элементы поля P — *скалярами*. Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется *действительным*, над полем $\mathbb{C}$ — *комплексным*.

1.1.2 Примеры линейных пространств

1 Поле P является линейным пространством над полем P с операциями сложения и умножения, определенными в P. В частности, $\mathbb{R}$ — действительное линейное пространство, $\mathbb{C}$ — комплексное линейное пространство.

2 Поле $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел является действительным линейным пространством.

3 Линейным пространством над полем P является множество, состоящее из одного элемента $\bar{0}$, если сложение и умножение вектора на скаляр $\alpha \in P$ определить равенствами $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ и $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Это линейное пространство называется *нулевым*.

4 Действительными линейными пространствами являются множества V^1, V^2, V^3 всех геометрических векторов на прямой, на плоскости, в пространстве, соответственно, с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на действительное число.

5 Пусть $n \in \mathbb{N}$, P — поле и $P^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \in P\}$ — n-я декартова степень множества P. Множество P^n является линейным пространством над полем P, ес-

ли операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр $\alpha \in P$ определить следующим образом:

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha\bar{x} = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

для всех $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in P^n$ и любого $\alpha \in P$.

Линейное пространство P^n называется *арифметическим n-мерным пространством над полем* P. В частности, $\mathbb{R}^n$ — *действительное арифметическое n-мерное пространство*, $\mathbb{C}^n$ — *комплексное арифметическое n-мерное пространство.*

6 Пусть P — поле, $m, n \in \mathbb{N}$. Множество $M_{m,n}(P)$ всех матриц размера $m \times n$ с элементами из поля P относительно сложения матриц и умножения матриц на элемент поля P является линейным пространством над полем P. В частности, линейным пространством является множество $M_n(P)$ всех квадратных матриц порядка n над полем P.

7 Множество $P[x]$ всех многочленов одной независимой переменной x над полем P является линейным пространством над полем P относительно операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент поля P. В частности, множество $P_n[x]$ всех многочленов над полем P, степени которых не превосходят натурального числа n, также является линейным пространством.

8 Множество всех функций вида $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ образует действительное линейное пространство, если сложение функций и умножение их на действительное число зада-

ются равенствами

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

для любых функций f, g и любых α, $x \in \mathbb{R}$.

Множество $C_{[a,b]}$ всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций действительной переменной x также является действительным линейным пространством.

1.1.3 Простейшие свойства векторов линейного пространства

Пусть V — линейное пространство над полем P. Тогда:

1) в пространстве V существует единственный нулевой вектор $\bar{0}$;

2) для каждого вектора $\bar{x} \in V$ существует единственный противоположный вектор $-\bar{x} \in V$;

3) если 0 — нулевой элемент поля P, то $0\bar{x} = \bar{0}$ для любого вектора $\bar{x} \in V$;

4) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$ для любого $\alpha \in P$;

5) если (-1) — противоположный элемент к единичному элементу поля P, то $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$ для любого $\bar{x} \in V$.

1.1.4 Линейная зависимость векторов

Пусть V — линейное пространство над полем P. *Системой векторов* будем называть конечную последовательность векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ пространства V.

Если для вектора $\bar{y} \in V$ существуют скаляры α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in P$ такие, что

$$\bar{y} = \alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{x}_n,$$

то говорят, что вектор $\bar{y}$ *линейно выражается через векторы* системы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. В этом случае также говорят, что вектор $\bar{y}$ является *линейной комбинацией векторов* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$.

Система векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ линейного пространства V над полем P называется *линейно независимой*, если равенство

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{x}_n = \bar{0}$$

имеет место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \in P$. Если же существуют такие скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in P$, одновременно не равные нулю, при которых выполняется указанное равенство, то векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ называются *линейно зависимыми.*

Теорема 1.1. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через остальные векторы.*

1.1.5 Изоморфизм линейных пространств

Два линейных пространства V и V' над одним и тем же полем P называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi\colon V \to V'$ такое, что:

1) $\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y})$ для всех $\bar{x}, \bar{y} \in V$;

2) $\varphi(\alpha\bar{x}) = \alpha\varphi(\bar{x})$ для любого $\bar{x} \in V$ и любого $\alpha \in P$.

Отображение φ в этом случае называется *изоморфизмом* линейных пространств V и V'. Если пространства V и V' изоморфны, то пишут $V \simeq V'$.

Теорема 1.2. *Пусть $\varphi\colon V \to V'$ — изоморфизм линейных пространств V и V' над полем P. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\bar{0}$ — нулевой вектор пространства V, то $\varphi(\bar{0})$ —*

нулевой вектор пространства V';

2) $\varphi(-\bar{x}) = -\varphi(\bar{x})$ *для каждого* $\bar{x} \in V$;

3) *если система векторов* $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_n$ *пространства* V *линейно независима, то система векторов* $\varphi(\bar{x}_1)$, $\varphi(\bar{x}_2)$, ..., $\varphi(\bar{x}_n)$ *пространства* V' *также линейно независима.*

1.2 Примеры решения задач

Пример 1.1. Является ли действительным линейным пространством с операциями, определенными в $\mathbb{R}^n$, множество всех тех элементов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых $\alpha_n = 0$?

$\square$ Проверим выполнение условий определения линейного пространства для множества

$$M = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2. \ldots, n-1\}.$$

1 Любым двум элементам $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$, $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 0)$ из множества M соответствует элемент $\bar{a}+\bar{b} = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_{n-1}+\beta_{n-1}, 0)$, который определяется однозначно, ввиду однозначности сумм действительных чисел $\alpha_i + \beta_i$, и который снова принадлежит множеству M.

1.1 Для любых элементов $\bar{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$, $\bar{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0)$, $\bar{c} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, 0)$ из множества M ввиду ассоциативности сложения действительных чисел, имеем

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} =$$

$$= ((\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) + (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0)) + (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, 0) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}, 0) + (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, 0) =$$

$$= ((\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1, \ldots, (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) + \gamma_{n-1}, 0) =$$
$$= (\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1), \ldots, \alpha_{n-1} + (\beta_{n-1} + \gamma_{n-1}), 0) =$$
$$= (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) + (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_{n-1} + \gamma_{n-1}, 0) =$$
$$= (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) + ((\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0) +$$
$$+ (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, 0)) = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}),$$

т. е. сложение элементов из множества M ассоциативно.

1.2 Сложение на множестве M коммутативно, так как для любых элементов $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$ и $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 0)$ из множества M, ввиду коммутативности сложения действительных чисел, имеем

$$\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 0) =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}, 0) =$$
$$= (\beta_1 + \alpha_1, \beta_2 + \alpha_2, \ldots, \beta_{n-1} + \alpha_{n-1}, 0) =$$
$$= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) = \bar{b} + \bar{a}.$$

1.3 Нулевым элементом в множестве M будет элемент $\bar{0} = (0, \ldots, 0, 0)$, так как $\bar{0} \in M$ и для любого элемента $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) \in M$ выполняется равенство

$$\bar{a} + \bar{0} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) + (0, \ldots, 0, 0) =$$
$$= (\alpha_1 + 0, \alpha_2 + 0, \ldots, \alpha_{n-1} + 0, 0) =$$
$$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) = \bar{a}.$$

1.4 Пусть $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) \in M$. Противоположным для него элементом в множестве M будет элемент $\bar{b} = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_{n-1}, 0)$, так как $\bar{b} \in M$ и

$$\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) + (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_{n-1}, 0) =$$
$$= (0, \ldots, 0, 0) = \bar{0}.$$

2 Любым элементам $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) \in M$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ соответствует элемент $\lambda\bar{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_{n-1}, 0)$,

который снова принадлежит множеству M и определяется однозначно, ввиду однозначности произведений $\lambda\alpha_i$ действительных чисел.

2.1 Для любого $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) \in M$ и любых λ, $\mu \in \mathbb{R}$, ввиду ассоциативности умножения действительных чисел, имеем

$$(\lambda\mu)\bar{a} = (\lambda\mu)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) =$$
$$= ((\lambda\mu)\alpha_1, (\lambda\mu)\alpha_2, \ldots, (\lambda\mu)\alpha_{n-1}, 0) =$$
$$= (\lambda(\mu\alpha_1), \lambda(\mu\alpha_2), \ldots, \lambda(\mu\alpha_{n-1}), 0) =$$
$$= \lambda(\mu\alpha_1, \mu\alpha_2, \ldots, \mu\alpha_{n-1}, 0) =$$
$$= \lambda(\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)) = \lambda(\mu\bar{a}).$$

2.2 Для любого $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) \in M$ имеем

$$1\bar{a} = 1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) =$$
$$= (1 \cdot \alpha_1, 1 \cdot \alpha_2, \ldots, 1 \cdot \alpha_{n-1}, 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) = \bar{a}.$$

2.3 Для любых элементов $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$ и $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 0)$ из множества M и любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 0)) =$$
$$= \lambda(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}, 0) =$$
$$= (\lambda(\alpha_1 + \beta_1), \lambda(\alpha_2 + \beta_2), \ldots, \lambda(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}), 0) =$$
$$= (\lambda\alpha_1 + \lambda\beta_1, \lambda\alpha_2 + \lambda\beta_2, \ldots, \lambda\alpha_{n-1} + \lambda\beta_{n-1}, 0) =$$
$$= (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_{n-1}, 0) + (\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \ldots, \lambda\beta_{n-1}, 0) =$$
$$= \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) + \lambda(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 0) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}.$$

2.4 Для любого $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$ из множества M и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, используя законы дистрибутивности для действительных чисел, получим

$$(\lambda + \mu)\bar{a} = (\lambda + \mu)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) =$$

$$= ((\lambda+\mu)\alpha_1, (\lambda+\mu)\alpha_2, \ldots, (\lambda+\mu)\alpha_{n-1}, 0) =$$
$$= (\lambda\alpha_1+\mu\alpha_1, \lambda\alpha_2+\mu\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_{n-1}+\mu\alpha_{n-1}, 0) =$$
$$= (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_{n-1}, 0) + (\mu\alpha_1, \mu\alpha_2, \ldots, \mu\alpha_{n-1}, 0) =$$
$$= \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) + \mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}.$$

Так как все условия в определении линейного пространства выполняются, то множество M с операциями, определенными в $\mathbb{R}^n$, является действительным линейным пространством.

Ответ: является. ⊠

Пример 1.2. Являются ли векторы

$$\bar{a}_1 = (1, 2, 3, 4), \ \bar{a}_2 = (3, -1, 5, -3), \ \bar{a}_3 = (2, -3, 2, -7)$$

из пространства $\mathbb{R}^4$ линейно зависимыми? В случае утвердительного ответа укажите три действительных числа α_1, α_2, α_3, одновременно не равные нулю такие, что

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 = \bar{0}.$$

□ Пусть для некоторых скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 = \bar{0}$. Тогда

$$\alpha_1(1, 2, 3, 4) + \alpha_2(3, -1, 5, -3) + \alpha_3(2, -3, 2, -7) = (0, 0, 0, 0),$$
$$(\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1, 4\alpha_1) + (3\alpha_2, -\alpha_2, 5\alpha_2, -3\alpha_2) +$$
$$+ (2\alpha_3, -3\alpha_3, 2\alpha_3, -7\alpha_3) = (0, 0, 0, 0),$$
$$(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3, 2\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3, 3\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_3, 4\alpha_1-3\alpha_2-7\alpha_3) =$$
$$= (0, 0, 0, 0),$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III+I\cdot(-3) \\ IV+I\cdot(-4)}]{II+I\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\substack{III\cdot\frac{1}{4} \\ IV\cdot\frac{1}{15}}]{II\cdot(-\frac{1}{7})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[IV+II]{III+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Соответствующая ступенчатая система

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

имеет число уравнений меньшее, чем число неизвестных, поэтому у системы бесконечно много решений. Пусть α_1 и α_2 — главные неизвестные, α_3 — свободная неизвестная. Тогда $\alpha_2 = -\alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Так как решений бесконечно много, то существуют скаляры α_1, α_2, α_3, одновременно не равные нулю, при которых

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 = \bar{0}.$$

Это означает, что векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ линейно зависимы.

Взяв, например, $\alpha_3 = 1$, получим $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, для которых $\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = \bar{0}$.

Ответ: являются; $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$. $\boxtimes$

Пример 1.3. Являются ли линейно зависимыми векторы $z_1 = -3 + 5i$ и $z_2 = 4 + 2i$ из линейного пространства $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$?

$\square$ Пусть для некоторых α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0$. Тогда

$$\alpha_1(-3+5i) + \alpha_2(4+2i) = 0 + 0i,$$

$$-3\alpha_1 + 5\alpha_1 i + 4\alpha_2 + 2\alpha_2 i = 0 + 0i,$$

$$(-3\alpha_1 + 4\alpha_2) + (5\alpha_1 + 2\alpha_2)i = 0 + 0i.$$

Откуда

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \\ 5\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Так как число уравнений системы равно числу неизвестных и определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 20 = -26 \neq 0,$$

то система уравнений является крамеровской и поэтому имеет единственное решение. Поскольку система однородная, то этим единственным решением является нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Следовательно, равенство $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0$ выполняется только при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Это означает, что векторы z_1 и z_1 линейно независимы.

Ответ: не являются. $\boxtimes$

Пример 1.4. Являются ли векторы $f_1(x) = 3x - 2$, $f_2(x) = -x^2 + 3x - 4$, $f_3(x) = 2x^2 - 2x + 5$ из линейного пространства $\mathbb{R}_2[x]$ линейно независимыми?

$\square$ Пусть для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$. Тогда

$$\alpha_1(3x-2)+\alpha_2(-x^2+3x-4)+\alpha_3(2x^2-2x+5) = 0x^2+0x+x,$$

$$(-\alpha_2 + 2\alpha_3)x^2 + (3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3)x + (-2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 5\alpha_3) =$$

$$= 0x^2 + 0x + 0,$$

откуда

$$\begin{cases} -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему уравнений по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 24 - 4 + 12 + 0 + 15 = -1 \neq 0.$$

Система уравнений является крамеровской и имеет единственное решение. Поскольку система однородна, то это решение нулевое $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, векторы $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ линейно независимы.

Ответ: являются. $\boxtimes$

Пример 1.5. Найдите все значение λ, при которых в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ вектор $\bar{c} = (10, 1, \lambda, -1)$ линейно выражается через векторы $\bar{a}_1 = (-3, 2, 4, 1)$, $\bar{a}_2 = (2, 1, -2, 0)$, $\bar{a}_3 = (0, -3, 2, -1)$.

$\square$ Пусть для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 = \bar{c}$. Тогда

$$\alpha_1(-3, 2, 4, 1) + \alpha_2(2, 1, -2, 0) + \alpha_3(0, -3, 2, -1) = \\ = (10, 1, \lambda, -1),$$

откуда

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 10, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = \lambda, \\ \alpha_1 - \alpha_3 = -1. \end{cases}$$

Наша задача: найти те значения λ, при которых система уравнений имеет решения. Для этого исследуем систему на совместность, используя теорему Кронекера-Капелли.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & \lambda \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow IV}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & \lambda \\ -3 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III+I\cdot(-4) \\ IV+I\cdot 3}]{II+I\cdot(-2)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & \lambda+4 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[IV+II\cdot(-2)]{III+II\cdot 2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \lambda+10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III \leftrightarrow IV}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & \lambda+10 \end{array}\right) \xrightarrow{IV+III\cdot 4}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+14 \end{array}\right).$$

Так как ранг матрицы системы равен 3, то ранг расширенной матрицы системы также должен быть равен 3, т. е. $\lambda + 14 = 0$, $\lambda = -14$. Таким образом, при $\lambda = -14$ вектор $\bar{c}$ линейно выражается через векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$.

Ответ: $\lambda = -14$. $\boxtimes$

Пример 1.6. Докажите, что линейные пространства $\mathbb{R}_1[x]$ и $\mathbb{R}^2$ изоморфны.

$\square$ Напомним, что

$$\mathbb{R}_1[x] = \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}\},\ \mathbb{R}^2 = \{(c,d) | c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Установим соответствие φ между данными линейными пространствами следующим образом:

$$\varphi\colon ax + b \mapsto (a, b)$$

для всех многочленов $ax + b$ из $\mathbb{R}_1[x]$. Так как разные многочлены будут переходить в разные пары чисел, и для каждой пары $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ существует многочлен $f(x) = cx + d$ из $\mathbb{R}_1[x]$ такой, что

$$\varphi\colon cx + d \mapsto (c, d),$$

то отображение φ является взаимно однозначным.

Кроме того,

1) для любых $a_1x + b_1$ и $a_2x + b_2$ из пространства $\mathbb{R}_1[x]$

$$\varphi((a_1x + b_1) + (a_2x + b_2)) = \varphi((a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)) =$$
$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1,b_1) + (a_2, b_2) =$$
$$= \varphi(a_1x + b_1) + \varphi(a_2x + b_2);$$

2) для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любого многочлена $ax + b$ из $\mathbb{R}_1[x]$

$$\varphi(\lambda(ax + b)) = \varphi((\lambda a)x + (\lambda b)) =$$
$$= (\lambda a, \lambda b) = \lambda(a, b) = \lambda\varphi(ax + b).$$

Таким образом, по определению φ является изоморфизмом линейных пространств $\mathbb{R}_1[x]$ и $\mathbb{R}^2$. $\boxtimes$

1.3 Индивидуальные задания

1.1 – 1.5 Является ли действительным линейным пространством с операциями, определенными в $\mathbb{R}^n$, множество всех тех элементов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют следующему условию:

1.1 $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$?

1.2 $\alpha_1 = 0$?

1.3 $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$?

1.4 $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$?

1.5 $\alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}$?

1.6 – 1.11 Является ли действительным линейным пространством с операциями, определенными в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]$, множество всех тех многочленов $f(x)$ из $\mathbb{R}[x]$, которые удовлетворяют следующему условию:

1.6 $f(0) = 0$?

1.7 $2f(0) - 3f(1) = 0$?

1.8 $f(1) + f(2) + \ldots + f(k) = 0$?

1.9 $f(0) = 2$?

1.10 $f(x) = ax^2 + bx + c$?

1.11 $f(x) = ax + b$?

1.12 – 1.15 Является ли комплексным линейным пространством с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на комплексное число указанное множество матриц

1.12 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}$?

1.13 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}$?

1.14 $\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\}$?

1.15 $\left\{\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\}$?

2 Являются ли векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ из линейного пространства $\mathbb{R}^3$ линейно независимыми? Если нет, то укажите три действительных числа α_1, α_2, α_3, одновременно не равные нулю такие, что $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 = \bar{0}$?

2.1 $\bar{a}_1 = (-1,1,1)$, $\bar{a}_2 = (2,-1,1)$, $\bar{a}_3 = (1,0,2)$.
2.2 $\bar{a}_1 = (1,1,-1)$, $\bar{a}_2 = (-1,2,2)$, $\bar{a}_3 = (0,3,1)$.
2.3 $\bar{a}_1 = (3,-1,2)$, $\bar{a}_2 = (1,0,6)$, $\bar{a}_3 = (-2,1,4)$.
2.4 $\bar{a}_1 = (-3,2,4)$, $\bar{a}_2 = (-2,1,3)$, $\bar{a}_3 = (-1,1,1)$.
2.5 $\bar{a}_1 = (-3,2,1)$, $\bar{a}_2 = (-2,3,3)$, $\bar{a}_3 = (-1,-1,-2)$.
2.6 $\bar{a}_1 = (0,3,2)$, $\bar{a}_2 = (1,2,1)$, $\bar{a}_3 = (-1,1,1)$.
2.7 $\bar{a}_1 = (1,-1,2)$, $\bar{a}_2 = (-1,1,2)$, $\bar{a}_3 = (2,-2,0)$.
2.8 $\bar{a}_1 = (0,-5,1)$, $\bar{a}_2 = (3,-2,1)$, $\bar{a}_3 = (3,3,0)$.
2.9 $\bar{a}_1 = (-1,1,0)$, $\bar{a}_2 = (5,0,1)$, $\bar{a}_3 = (4,1,1)$.
2.10 $\bar{a}_1 = (1,-4,3)$, $\bar{a}_2 = (-1,-3,2)$, $\bar{a}_3 = (2,-1,1)$.
2.11 $\bar{a}_1 = (-1,1,2)$, $\bar{a}_2 = (-1,2,-3)$, $\bar{a}_3 = (-2,3,-1)$.
2.12 $\bar{a}_1 = (0,-3,2)$, $\bar{a}_2 = (-1,-2,1)$, $\bar{a}_3 = (-1,1,-1)$.
2.13 $\bar{a}_1 = (-1,2,1)$, $\bar{a}_2 = (2,2,-1)$, $\bar{a}_3 = (-3,0,2)$.
2.14 $\bar{a}_1 = (2,1,2)$, $\bar{a}_2 = (1,-1,4)$, $\bar{a}_3 = (1,2,-2)$.
2.15 $\bar{a}_1 = (-2,5,3)$, $\bar{a}_2 = (1,1,5)$, $\bar{a}_3 = (-3,4,-2)$.

3 Являются ли линейно зависимыми векторы z_1 и z_2 из пространства $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$?

3.1 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 4i$.
3.2 $z_1 = -3 + i$, $z_2 = 2 + 3i$.
3.3 $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -1 + i$.
3.4 $z_1 = -4i$, $z_2 = 5 - 2i$.

3.5 $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = -4 + i$.
3.6 $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$.
3.7 $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 1 - i$.
3.8 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 2 - i$.
3.9 $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -3 + 2i$.
3.10 $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + 3i$.
3.11 $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 1 - i$.
3.12 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$.
3.13 $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$.
3.14 $z_1 = -3 + i$, $z_2 = 2 - 2i$.
3.15 $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = 4 + i$.

4 Являются ли векторы $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ из линейного пространства $\mathbb{R}_2[x]$ линейно зависимыми?

4.1 $f_1(x) = x^2 + 5$, $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$,
$$f_3(x) = x^2 + 16x + 1.$$
4.2 $f_1(x) = 6x + 9$, $f_2(x) = x^2 - 8x + 12$,
$$f_3(x) = -x^2 + 14x - 3.$$
4.3 $f_1(x) = 3x^2 - 5$, $f_2(x) = 2x + 1$,
$$f_3(x) = x^2 - x - 1.$$
4.4 $f_1(x) = 2x^2 + x$, $f_2(x) = 4x^2 - 5x + 3$,
$$f_3(x) = -2x^2 + 6x - 3.$$
4.5 $f_1(x) = 6x + 5$, $f_2(x) = 2x^2 + x + 3$,
$$f_3(x) = x^2 - 1.$$
4.6 $f_1(x) = -x^2 - 2x - 5$, $f_2(x) = 2x^2 - 4$,
$$f_3(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$
4.7 $f_1(x) = -x^2 - x + 3$, $f_2(x) = 2x - 5$,
$$f_3(x) = 6x^2 + 3x + 2.$$
4.8 $f_1(x) = -x^2 + 2x$, $f_2(x) = 2x^2 + x + 2$,
$$f_3(x) = 3x^2 - x + 2.$$

4.9 $f_1(x) = 4x^2 + 2x + 4, \quad f_2(x) = 3x + 6,$
$$f_3(x) = 2x^2 + x + 6.$$
4.10 $f_1(x) = -2x^2 + 5x - 7, \quad f_2(x) = 4x^2 - 3x,$
$$f_3(x) = 2x^2 + 2x - 7.$$
4.11 $f_1(x) = -3x^2 + 2x + 1, \quad f_2(x) = -x^2 + x + 2,$
$$f_3(x) = 5x - 6.$$
4.12 $f_1(x) = -x^2 + 3x, \quad f_2(x) = -3x^2 + 1,$
$$f_3(x) = 2x^2 + 3x - 1.$$
4.13 $f_1(x) = x^2 + 4x + 3, \quad f_2(x) = 2x^2 - 5,$
$$f_3(x) = 4x^2 + x.$$
4.14 $f_1(x) = 2x^2 + x + 1, \quad f_2(x) = 3x - 1,$
$$f_3(x) = -2x^2 + 2x - 2.$$
4.15 $f_1(x) = x^2 + 3x + 5, \quad f_2(x) = -2x^2 + 3,$
$$f_3(x) = 6x - 1.$$

5 Найдите все значения α, при которых в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ вектор $\bar{c}$ линейно выражается через векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$.

5.1 $\bar{a}_1 = (1, 2, 3, -1), \quad \bar{a}_2 = (0, 1, -2, 3),$
$\bar{a}_3 = (-1, 2, 0, 4), \quad \bar{c} = (1, 1, 2, \alpha).$
5.2 $\bar{a}_1 = (-1, 0, 2, 5), \quad \bar{a}_2 = (1, -1, 2, 0),$
$\bar{a}_3 = (2, 0, 1, 5), \quad \bar{c} = (-1, -2, \alpha, 3).$
5.3 $\bar{a}_1 = (0, 2, 3, -4), \quad \bar{a}_2 = (0, 1, -3, 2),$
$\bar{a}_3 = (5, 4, 3, -2), \quad \bar{c} = (0, 1, 1, \alpha).$
5.4 $\bar{a}_1 = (-2, 1, 4, 2), \quad \bar{a}_2 = (1, 2, 4, -5),$
$\bar{a}_3 = (1, 1, -1, 2), \quad \bar{c} = (-1, 1, 0, \alpha).$
5.5 $\bar{a}_1 = (0, 3, 2, 1), \quad \bar{a}_2 = (3, -2, 1, 0),$
$\bar{a}_3 = (0, 5, 3, 2), \quad \bar{c} = (0, 2, -1, \alpha).$
5.6 $\bar{a}_1 = (-1, 1, 1, -1), \quad \bar{a}_2 = (-4, 2, 5, 3),$
$\bar{a}_3 = (-4, -2, 1, 0), \quad \bar{c} = (-2, 1, \alpha, 0).$

5.7 $\bar{a}_1 = (-2, 1, 1, 2)$, $\bar{a}_2 = (-1, 0, 3, 5)$,
$\bar{a}_3 = (-1, 4, 5, 0)$, $\bar{c} = (-1, -1, \alpha, 1)$.

5.8 $\bar{a}_1 = (3, -4, 5, 2)$, $\bar{a}_2 = (-1, 1, 2, 4)$,
$\bar{a}_3 = (4, 2, -2, 4)$, $\bar{c} = (-2, 2, \alpha, 2)$.

5.9 $\bar{a}_1 = (1, -2, 2, 0)$, $\bar{a}_2 = (-1, 3, -2, 0)$,
$\bar{a}_3 = (-2, 3, -3, 1)$, $\bar{c} = (1, -1, -1, \alpha)$.

5.10 $\bar{a}_1 = (3, 2, -1, 1)$, $\bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1)$,
$\bar{a}_3 = (-3, 1, 2, -1)$, $\bar{c} = (-3, 2, \alpha, 1)$.

5.11 $\bar{a}_1 = (2, -2, 3, -3)$, $\bar{a}_2 = (-2, 4, 1, 0)$,
$\bar{a}_3 = (4, -5, 2, -1)$, $\bar{c} = (-2, 3, 1, \alpha)$.

5.12 $\bar{a}_1 = (4, 2, -1, 0)$, $\bar{a}_2 = (1, 5, 0, -1)$,
$\bar{a}_3 = (5, 2, -1, 0)$, $\bar{c} = (1, -1, 1, \alpha)$.

5.13 $\bar{a}_1 = (-2, 1, 1, -3)$, $\bar{a}_2 = (0, -1, 1, 2)$,
$\bar{a}_3 = (1, -3, 1, 4)$, $\bar{c} = (-5, 2, 4, \alpha)$.

5.14 $\bar{a}_1 = (-1, 3, 2, -3)$, $\bar{a}_2 = (2, -1, 0, 2)$,
$\bar{a}_3 = (4, -1, 1, 3)$, $\bar{c} = (-1, 4, 3, \alpha)$.

5.15 $\bar{a}_1 = (2, -2, 3, 1)$, $\bar{a}_2 = (4, -2, 1, 3)$,
$\bar{a}_3 = (0, -1, 0, 1)$, $\bar{c} = (0, 5, \alpha, -2)$.

6 Докажите, что линейные пространства V и W изоморфны.

6.1 $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}_3[x]$.

6.2 $V = \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^2$.

6.3 $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}_3[x]$.

6.4 $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}^4$.

6.5 $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = V^3$.

6.6 $V = \mathbb{C}_2[x]$, $W = \mathbb{C}^3$.

6.7 $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}_1[x]$.

6.8 $V = \mathbb{R}_1[x]$, $W = V^2$.

6.9 $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ над $\mathbb{C}$, $W = \mathbb{C}_1[x]$.

6.10 $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ над $\mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^2$.

6.11 $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}$ над $\mathbb{C}$, $W = \mathbb{C}_2[x]$.

6.12 $V = \{(\alpha_1, 0, \alpha_2) | \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ над $\mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_1[x]$.

6.13 $V = \mathbb{R}_1[x]$, $W = \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$.

6.14 $V = V^2$, $W = \mathbb{R}^2$.

6.15 $V = V^3$, $W = \mathbb{R}^3$.

2 БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

2.1 Элементы теории

2.1.1 Определение базиса линейного пространства

Пусть V – линейное пространство над полем P. Если для любого натурального числа n в пространстве V имеется n линейно независимых векторов, то пространство V называется *бесконечномерным.*

Пусть пространство V не бесконечномерное. Система векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ называется *базисом пространства* V, если она линейно независима и любой вектор пространства V линейно выражается через векторы этой системы. Такое пространство будем называть *n-мерным линейным пространством.*

2.1.2 Размерность линейного пространства

В n-мерном линейном пространстве V число n называется *размерностью линейного пространства* V и обозначается $\dim V$.

Размерность нулевого линейного пространства считают равной нулю, а пространство называют *нульмерным.* Все n-мерные пространства для $n = 0, 1, 2, \ldots$ называются *конечномерными.* n-мерное линейное пространство V будем обозначать V_n. Если линейное пространство V бесконечномерное, то пишут $\dim V = \infty$.

Приведем размерности некоторых часто встречающихся линейных пространств:

1) $\dim V^1 = 1, \dim V^2 = 2, \dim V^3 = 3$;

2) $\dim P^n = n$, где $n \in N$;

3) $\dim M_{m,n}(P) = mn, \dim M_n(P) = n^2$, где $m, n \in \mathbb{N}$;

4) $\dim P[x] = \infty; \dim P_n[x] = n + 1$, где $n \in \mathbb{N}$;

5) $\dim C_{[a,b]} = \infty$;

6) размерность действительного линейного пространства $\mathbb{C}$ равна 2.

Теорема 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) два линейных пространства V и W над одним и тем же полем P изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$;

2) в конечномерном линейном пространстве все базисы состоят из одного и того же числа векторов;

3) в n-мерном линейном пространстве V любая линейно независимая система, состоящая из n векторов, является базисом.

Из теоремы 2.1 следует, что в линейном пространстве V_n любая система из $n+1$ вектора является линейно зависимой, т. е. $n = \dim V$ — максимальное число линейно независимых векторов в пространстве V.

2.1.3 Координаты вектора в базисе

Пусть V_n — n-мерное линейное пространство над полем P, а $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ — базис пространства V_n. По определению базиса любой вектор $\bar{x} \in V_n$ можно представить в виде

$$\bar{x} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые элементы поля P.

Такое представление вектора $\bar{x}$ называется *разложением по векторам базиса* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$. Элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются *координатами вектора* $\bar{x}$ *в базисе* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.

Разложение вектора $\bar{x}$ по векторам базиса можно записать в матричной форме. Если обозначим

$$(\bar{x}) = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n), \quad [\bar{e}] = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \ldots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix},$$

то разложение $\bar{x} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n$ является элементом произведения матриц $(\bar{x})[\bar{e}]$. В этом случае будем писать $\bar{x} = (\bar{x})[\bar{e}]$. Матрицу $(\bar{x})$ будем называть *координатной строкой вектора* $\bar{x}$, а матрицу $[\bar{e}]$ – *базисным столбцом.*

Теорема 2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) координаты вектора в заданном базисе определяются однозначно;

2) при сложении векторов, рассматриваемых в одном и том же базисе, соответствующие координаты складываются, т. е.

$$(\bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x}) + (\bar{y});$$

3) при умножении элемента α *из поля* P *на вектор* $\bar{x}$*, этот элемент* α *умножается на каждую координату вектора* $\bar{x}$*, т. е.* $(\alpha\bar{x}) = \alpha(\bar{x})$.

2.1.4 Связь между базисами линейного пространства

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n$ — два базиса линейного пространства V_n над полем P. Разложим векторы $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n$ по векторам базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \ldots + a_{1n}\bar{e}_n, \\ \bar{e}'_2 = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \ldots + a_{2n}\bar{e}_n, \\ \ldots \\ \bar{e}'_n = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \ldots + a_{nn}\bar{e}_n. \end{cases}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ к базису $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n$*. Если возьмем базисные столбцы

$$[\bar{e}] = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \ldots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix}, \quad [\bar{e}'] = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \ldots \\ \bar{e}'_n \end{pmatrix},$$

то указанная выше система может быть записана в матричном виде $[\bar{e}'] = A[\bar{e}]$.

Теорема 2.3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому невырожденная;

2) если A – матрица перехода от первого базиса линейного пространства ко второму, то A^{-1} – матрица *перехода от второго базиса к первому.*

2.1.5 Преобразование координат вектора при изменении базиса

Пусть $(\bar{x})$ – координатная строка вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\dots$, $\bar{e}_n$, $(\bar{x})'$ – координатная строка вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$, $\dots$, $\bar{e}'_n$ линейного пространства V_n, A – матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\dots$, $\bar{e}_n$ к базису $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$, $\dots$, $\bar{e}'_n$. Тогда связь между координатами вектора $\bar{x}$ в указанных базисах определяется следующими формулами $(\bar{x}) = (\bar{x})'A$, $(\bar{x})' = (\bar{x})A^{-1}$.

2.2 Примеры решения задач

Пример 2.1. В линейном пространстве $\mathbb{R}_4[x]$ многочлены 1, $x+1$, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(x+1)^4$ образуют базис. Найдите координаты многочлена

$$f(x) = -2x^4 + 3x^3 - 4x - 6$$

в этом базисе.

$\square$ Разложим многочлен $f(x)$ по степеням $x+1$ с помощью схемы Горнера.

	-2	3	0	-4	-6
-1	-2	5	-5	1	**-7**
-1	-2	7	-12	**13**	
-1	-2	9	**-21**		
-1	-2	**11**			
-1	**-2**				

Таким образом, $f(x) = -2(x+1)^4 + 11(x+1)^3 - 21(x+ + 1)^2 + 13(x+1) - 7$. Следовательно, координаты многочлена $f(x)$ в базисе 1, $x+1$, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(x+1)^4$ есть числа -7, 13, -21, 11, -2.

Ответ: -7, 13, -21, 11, -2. $\boxtimes$

Пример 2.2. Докажите, что векторы $\bar{e}_1 = (1, -2, 3)$, $\bar{e}_2 = (3, 2, -1)$, $\bar{e}_3 = (1, 1, 0)$ образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$. Найдите координаты вектора $\bar{a} = (3, 5, 6)$ в этом базисе.

$\square$ Докажем, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$. Так как линейное пространство $\mathbb{R}^3$ имеет размерность три, то ввиду утверждения 3) теоремы 2.1 достаточно показать, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ линейно независимы.

Пусть $\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3 = \bar{0}$. Тогда

$$\alpha_1(1, -2, 3) + \alpha_2(3, 2, -1) + \alpha_3(1, 1, 0) = (0, 0, 0),$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Так как число уравнений системы равно числу неизвестных и определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 9 - 6 + 1 + 0 = 6 \neq 0,$$

то система уравнений является крамеровской, а значит, имеет единственное решение. Поскольку система уравнений однородная, то этим единственным решением является нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ линейно независимы и в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ размерности три они образуют базис.

Пусть α_1, α_2, α_3 — координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Тогда

$$\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3 = \bar{a},$$

$$\alpha_1(1, -2, 3) + \alpha_2(3, 2, -1) + \alpha_3(1, 1, 0) = (3, 5, 6),$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 3, \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 5, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 6. \end{cases}$$

Как показано выше, определитель матрицы системы $\Delta = 6 \neq 0$ и система уравнений, являясь крамеровской, имеет единственное решение. Воспользуемся правилом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 + 18 - 12 + 3 + 0 = 4,$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 9 - 15 - 6 + 0 = -24,$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{6} = -4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 6 + 45 - 18 + 5 + 36 = 86,$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{86}{6} = \frac{43}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$, -4, $\frac{43}{3}$. $\boxtimes$

Пример 2.3. Докажите, что комплексные числа $z_1 = -2 + i$ и $z_2 = -3 + 2i$ образуют базис действительного линейного пространства $\mathbb{C}$. Запишите координатную строку числа $z = 4 - 3i$ в этом базисе.

$\square$ Покажем, что векторы z_1 и z_2 линейного пространства $\mathbb{C}$ линейно независимы. Пусть $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0$. Тогда

$$\alpha_1(-2 + i) + \alpha_2(-3 + 2i) = 0,$$
$$(-2\alpha_1 - 3\alpha_2) + (\alpha_1 + 2\alpha_2)i = 0 + 0i,$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0,$$

поэтому система уравнений является крамеровской и имеет единственное решение. Так как система уравнений однородная, то единственным решением является нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Следовательно, векторы z_1 и z_2 линейно независимы.

Поскольку $\dim \mathbb{C} = 2$, то ввиду теоремы 2.1 векторы z_1 и z_2 образуют базис линейного пространства $\mathbb{C}$.

Пусть α_1 и α_2 – координаты вектора z в базисе z_1, z_2. Тогда

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = z,$$
$$\alpha_1(-2 + i) + \alpha_2(-3 + 2i) = 4 - 3i,$$
$$(-2\alpha_1 - 3\alpha_2) + (\alpha_1 + 2\alpha_2)i = 4 - 3i,$$

откуда

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -3. \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\Delta = -1 \neq 0$, то решить систему можно по правилу Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1, \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2, \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2.$$

Ответ: $(1 \quad -2)$. ⊠

Пример 2.4. Докажите, что матрицы E_1, E_2, E_3, E_4 образуют базис пространства $M_2(\mathbb{R})$. Найдите разложение вектора A по векторам этого базиса.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

□ Покажем, что векторы E_1, E_2, E_3, E_4 линейно независимы. Пусть

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = O,$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} +$$

$$+\alpha_3 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 & -\alpha_1 + 3\alpha_3 + 5\alpha_4 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 & \alpha_1 - 2\alpha_2 + 6\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 = 0, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0, \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 6\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем определитель матрицы системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{III+I\cdot(-2) \\ IV+I\cdot(-1)}}{\overset{II+I}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} \overset{IV+II\cdot(-1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{IV+III\cdot(-1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1.$$

Так как определитель матрицы системы $\Delta \neq 0$, то система уравнений является крамеровской и имеет единственное решение. Поскольку система уравнений однородная, то этим единственным решением является нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Следовательно, векторы E_1, E_2, E_3, E_4 линейно независимы. Так как линейное пространство $M_2(\mathbb{R})$ имеет размерность четыре, то любые четыре линейно независимых вектора из $M_2(\mathbb{R})$ образуют базис этого пространства. Поэтому E_1, E_2, E_3, E_4 — базис пространства $M_2(\mathbb{R})$.

Пусть α_1, α_2, α_3, α_4 — координаты вектора A в базисе E_1, E_2, E_3, E_4. Тогда

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = A,$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\alpha_4 \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 = 1, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_3 + 5\alpha_4 = 4, \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = -2, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 6\alpha_4 = 6. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III+I\cdot(-2) \\ IV+I\cdot(-1)}]{II+I\cdot(1)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 8 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{IV+II\cdot(-1)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{IV+III\cdot(-1)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы системы и равен 4. По теореме Кронекера-Капелли система совместна.

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 = 1, \\ \quad -\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 5, \\ \qquad -\alpha_3 + 4\alpha_4 = -4, \\ \qquad\qquad \alpha_4 = 4. \end{cases}$$

Число уравнений ступенчатой системы равно числу неизвестных, поэтому система имеет единственное решение.

$$\alpha_4 = 4,$$
$$-\alpha_3 + 4 \cdot 4 = -4, \alpha_3 = 20,$$
$$-\alpha_2 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 4 = 5, \alpha_2 = 47,$$
$$\alpha_1 - 47 - 20 - 2 \cdot 4 = 1, \alpha_1 = 76.$$

Ответ: $A = 76E_1 + 47E_2 + 20E_3 + 4E_4$. ⊠

Пример 2.5. В линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы базисы $\bar{e}_1 = (3, -5)$, $\bar{e}_2 = (-1, 4)$ и $\bar{a}_1 = (3, 2)$, $\bar{a}_2 = (1, 3)$.

1) Найдите матрицу перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$.

2) Найдите координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2$.

$\square$ 1) Пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

есть матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Тогда

$$\bar{a}_1 = \alpha_{11}\bar{e}_1 + \alpha_{12}\bar{e}_2,$$

$$\bar{a}_2 = \alpha_{21}\bar{e}_1 + \alpha_{22}\bar{e}_2.$$

Из первого равенства имеем

$$(3,2) = \alpha_{11}(3,-5) + \alpha_{12}(-1,4),$$

$$\begin{cases} 3\alpha_{11} - \alpha_{12} = 3, \\ -5\alpha_{11} + 4\alpha_{12} = 2. \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-5)(-1) = 7 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14, \alpha_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-15) = 21, \alpha_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{21}{7} = 3.$$

Аналогично находим α_{21} и α_{22}.

$$(1,3) = \alpha_{21}(3,-5) + \alpha_{22}(-1,4),$$

$$\begin{cases} 3\alpha_{21} - \alpha_{22} = 1, \\ -5\alpha_{21} + 4\alpha_{22} = 3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-5)(-1) = 7 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-3) = 7, \alpha_{21} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-5) = 14, \alpha_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2.$$

Таким образом, матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ есть матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Пусть $(\alpha_1 \quad \alpha_2)$ координатная строка вектора $\bar{c} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Тогда

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2) = (2 \quad -1)A^{-1},$$

где A — матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$.

Найдем матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0.$$

$$A_{11} = |2| = 2, A_{21} = -|3| = -3,$$

$$A_{12} = -|1| = -1, A_{22} = |2| = 2.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\alpha_1 \ \alpha_2) = (2 \quad -1) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (5 \quad -8).$$

Ответ: 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) 5, -8. ⊠

Пример 2.6. Пусть $(-6 \quad 1 \quad 3)$ — координатная строка вектора $\bar{c}$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ действительного линейного пространства V, A – матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$,

$\bar{e}_3$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Найдите разложение вектора $\bar{c}$ по векторам базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ Пусть $\bar{c} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$ — разложение вектора $\bar{c}$ по векторам $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Тогда

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) = (-6 \quad 1 \quad 3)A =$$
$$= (-6 \quad 1 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = (-14 \quad 23 \quad 3).$$

Ответ: $\bar{c} = -14\bar{e}_1 + 23\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$. ⊠

2.3 Индивидуальные задания

1 В линейном пространстве $\mathbb{R}_5[x]$ многочлены 1, $x - a$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, $(x-a)^4$, $(x-a)^5$, где $a \in \mathbb{R}$, образуют базис. Найдите координаты многочлена $f(x)$ в этом базисе.

1.1 $a = 1$, $f(x) = x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 4$.
1.2 $a = -1$, $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 32x - 32$.
1.3 $a = 2$, $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.
1.4 $a = -2$, $f(x) = 2x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - 1$.
1.5 $a = 3$, $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 2$.
1.6 $a = -3$, $f(x) = -x^5 + 4x^4 + 3x^2 - 2x + 4$.
1.7 $a = 1$, $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.
1.8 $a = -1$, $f(x) = -2x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 1$.
1.9 $a = 2$, $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^2 - 3x$.
1.10 $a = -2$, $f(x) = -2x^5 - 2x^3 + 5x^2 - x + 4$.
1.11 $a = 2$, $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 + 2x - 3$.

1.12 $a = -2, \quad f(x) = -3x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x - 1.$

1.13 $a = 3, \quad f(x) = -2x^5 + 4x^4 - x^3 + x - 2.$

1.14 $a = 1, \quad f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3.$

1.15 $a = -1, \quad f(x) = -2x^5 + 3x^4 - x^2 + 6x - 5.$

2 Докажите, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$, и найдите координаты вектора $\bar{a}$ в этом базисе.

2.1 $\bar{e}_1 = (1,1,1), \quad \bar{e}_2 = (1,1,2),$
$\bar{e}_3 = (1,2,3), \quad \bar{a} = (6,7,10).$

2.2 $\bar{e}_1 = (2,1,-3), \quad \bar{e}_2 = (3,2,-5),$
$\bar{e}_3 = (1,-1,1), \quad \bar{a} = (2,-3,4).$

2.3 $\bar{e}_1 = (1,2,1), \quad \bar{e}_2 = (2,3,3),$
$\bar{e}_3 = (3,8,2), \quad \bar{a} = (5,15,2).$

2.4 $\bar{e}_1 = (3,5,8), \quad \bar{e}_2 = (5,4,-3),$
$\bar{e}_3 = (1,-1,2), \quad \bar{a} = (2,6,6).$

2.5 $\bar{e}_1 = (2,0,1), \quad \bar{e}_2 = (-1,2,3),$
$\bar{e}_3 = (-1,1,1), \quad \bar{a} = (-4,1,0).$

2.6 $\bar{e}_1 = (0,1,-2), \quad \bar{e}_2 = (-2,0,3),$
$\bar{e}_3 = (1,-1,1), \quad \bar{a} = (-5,4,-2).$

2.7 $\bar{e}_1 = (1,0,2), \quad \bar{e}_2 = (3,-1,4),$
$\bar{e}_3 = (2,-2,1), \quad \bar{a} = (-1,-3,-6).$

2.8 $\bar{e}_1 = (-2,3,1), \quad \bar{e}_2 = (0,2,1),$
$\bar{e}_3 = (1,2,1), \quad \bar{a} = (-5,9,3).$

2.9 $\bar{e}_1 = (-3,0,1), \quad \bar{e}_2 = (0,2,3),$
$\bar{e}_3 = (-1,-1,-1), \quad \bar{a} = (0,7,10).$

2.10 $\bar{e}_1 = (3,1,-1), \quad \bar{e}_2 = (-2,0,1),$
$\bar{e}_3 = (2,7,3), \quad \bar{a} = (7,6,0).$

2.11 $\bar{e}_1 = (4,0,5), \quad \bar{e}_2 = (-2,1,3),$
$\bar{e}_3 = (-5,1,-1), \quad \bar{a} = (-4,1,0).$

2.12 $\bar{e}_1 = (-1{,}3{,}7)$, $\bar{e}_2 = (0{,}2,-1)$,
$\bar{e}_3 = (1,-2,-8)$, $\bar{a} = (0{,}7,-4)$.
2.13 $\bar{e}_1 = (2{,}1{,}3)$, $\bar{e}_2 = (1,-1{,}2)$,
$\bar{e}_3 = (-3{,}1,-5)$, $\bar{a} = (6,-1{,}10)$.
2.14 $\bar{e}_1 = (-3{,}0,-1)$, $\bar{e}_2 = (0{,}2,-1)$,
$\bar{e}_3 = (1{,}3,-1)$, $\bar{a} = (8{,}12,-3)$.
2.15 $\bar{e}_1 = (3,-2{,}2)$, $\bar{e}_2 = (1{,}0{,}7)$,
$\bar{e}_3 = (-1{,}1{,}3)$, $\bar{a} = (3{,}0{,}22)$.

3 Докажите, что комплексные числа z_1 и z_2 образуют базис действительного линейного пространства комплексных чисел $\mathbb{C}$, и запишите координатную строку числа $z = -5 + 4i$ в этом базисе.

3.1 $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.
3.2 $z_1 = 2i$, $z_2 = 3 + 2i$.
3.3 $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 - i$.
3.4 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -5i$.
3.5 $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 2 + 2i$.
3.6 $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 1 + 2i$.
3.7 $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = -2i$.
3.8 $z_1 = -3 + i$, $z_2 = 2 - i$.
3.9 $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 1 + 3i$.
3.10 $z_1 = 4 - i$, $z_2 = 1 + 4i$.
3.11 $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + 3i$.
3.12 $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + 4i$.
3.13 $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -1 + 2i$.
3.14 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 7i$.
3.15 $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = -4 + 3i$.

4 Докажите, что матрицы E_1, E_2, E_3, E_4 образуют базис линейного пространства $M_2(\mathbb{R})$, и запишите разложение вектора

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

по векторам этого базиса.

4.1 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$,
$E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,
$E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

4.3 $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,
$E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

4.4 $E_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,
$E_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4.5 $E_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.6 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,
$E_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

4.7 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4.8 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.9 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

4.10 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$.

4.11 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

4.12 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4.13 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

4.14 $E_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.15 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

5 В линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы базисы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. 1) Найдите матрицу перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. 2) Найдите координаты вектора $\bar{c} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$.

5.1 $\bar{e}_1 = (2{,}1)$, $\bar{e}_2 = (3{,}2)$,
$\bar{a}_1 = (-4, -3)$, $\bar{a}_2 = (-7, -5)$.

5.2 $\bar{e}_1 = (1{,}2)$, $\bar{e}_2 = (2, -3)$,
$\bar{a}_1 = (-8{,}5)$, $\bar{a}_2 = (3, -1)$.

5.3 $\bar{e}_1 = (-1{,}1)$, $\bar{e}_2 = (1, -4)$,
$\bar{a}_1 = (0, -3)$, $\bar{a}_2 = (1, -10)$.

5.4 $\bar{e}_1 = (-1{,}2)$, $\bar{e}_2 = (-1{,}1)$,
$\bar{a}_1 = (1, -4)$, $\bar{a}_2 = (-1{,}5)$.

5.5 $\bar{e}_1 = (-2{,}3)$, $\bar{e}_2 = (1{,}2)$,
$\bar{a}_1 = (-8{,}5)$, $\bar{a}_2 = (-5{,}4)$.

5.6 $\bar{e}_1 = (2, -2)$, $\bar{e}_2 = (-3{,}1)$,
$\bar{a}_1 = (4{,}0)$, $\bar{a}_2 = (-5, -1)$.

5.7 $\bar{e}_1 = (0, -1)$, $\bar{e}_2 = (1{,}3)$,
$\bar{a}_1 = (1{,}2)$, $\bar{a}_2 = (3{,}7)$.

5.8 $\bar{e}_1 = (2{,}3)$, $\bar{e}_2 = (-1, -1)$,
$\bar{a}_1 = (4{,}5)$, $\bar{a}_2 = (5{,}6)$.

5.9 $\bar{e}_1 = (3{,}1)$, $\bar{e}_2 = (2, -1)$,
$\bar{a}_1 = (1, -3)$, $\bar{a}_2 = (0, -5)$.

5.10 $\bar{e}_1 = (2{,}5)$, $\bar{e}_2 = (1{,}1)$,

$\bar{a}_1 = (4{,}13)$, $\bar{a}_2 = (3{,}9)$.

5.11 $\bar{e}_1 = (-1{,}3)$, $\bar{e}_2 = (2, -1)$,
$\bar{a}_1 = (-4, -3)$, $\bar{a}_2 = (1{,}2)$.

5.12 $\bar{e}_1 = (1{,}1)$, $\bar{e}_2 = (1{,}4)$,
$\bar{a}_1 = (-1{,}5)$, $\bar{a}_2 = (1, -8)$.

5.13 $\bar{e}_1 = (1, -2)$, $\bar{e}_2 = (-2{,}3)$,
$\bar{a}_1 = (3, -4)$, $\bar{a}_2 = (-4{,}5)$.

5.14 $\bar{e}_1 = (3, -2)$, $\bar{e}_2 = (-1{,}2)$,
$\bar{a}_1 = (9, -2)$, $\bar{a}_2 = (7, -2)$.

5.15 $\bar{e}_1 = (4{,}5)$, $\bar{e}_2 = (3{,}2)$,
$\bar{a}_1 = (2, -1)$, $\bar{a}_2 = (1, -4)$.

6 Пусть $(-3 \quad 2 \quad 0)$ — координатная строка вектора $\bar{c}$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ действительного линейного пространства V, A — матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Найдите разложение вектора $\bar{c}$ по векторам базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

6.1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 6.2 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6.3 $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 6.4 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.5 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 6.6 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.7 $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. 6.8 $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

6.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 6.10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

6.11 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 6.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.13 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. 6.14 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.15 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Литература

1. *Беняш-Кривец, В. В.* Лекции по алгебре: группы, кольца, поля: учебное пособие для студентов математических специальностей / В. В. Беняш-Кривец, О. В. Мельников. — Минск: БГУ, 2008.
2. *Бузланов, А. В.* Алгебра и теория чисел. Линейная алгебра : практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов / А. В. Бузланов, С. Ф. Каморников, В. С. Монахов. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.
3. *Бурдун, А. А.* Сборник задач по алгебре и геометрии / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко. — Минск: Университетское, 1999.
4. *Кострикин, А. И.* Введение в алгебру: в 3 ч. / А. И. Кострикин. — М.: Физматлит, 2004.
5. *Милованов, М. В.* Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. — Минск: Амалфея, 2001.
6. *Монахов, В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. — Минск: Вышэйш. шк., 2006.
7. *Монахов, В. С.* Алгебра и теория чисел: практикум: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В. С. Монахов, А. В. Бузланов. — Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
8. Сборник задач по алгебре / под ред. Кострикина А.И. — М.: Физматлит., 2001.
9. *Шнеперман, Л. Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 1986–1987.
10. *Шнеперман, Л. Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Бузланов Александр Васильевич
Монахов Виктор Степанович
Подгорная Виктория Валерьевна
Сохор Ирина Леонидовна

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ

в четырех частях
для студентов математических
специальностей вузов.
Часть 1

В авторской редакции

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104